

Volume de sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Thomas Letendre (ENS de Lyon)
en collaboration avec M. Puchol

Orsay – 10 avril 2018

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n .
On choisit une sous-variété de codimension r de M au hasard.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...)?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Polynômes de Kac

Sur \mathbb{C} , un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Polynômes de Kac

Sur \mathbb{C} , un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ où les a_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) gaussiennes centrées réduites. On a :

$$\mathbb{E}[\text{card}(P_d^{-1}(0))] \sim \frac{2}{\pi} \ln d,$$

quand $d \rightarrow +\infty$.

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N ,
 Λ opérateur auto-adjoint et défini positif.

Définition

Une variable aléatoire $X \in V$ est dite gaussienne, centrée, de variance Λ , si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Lambda^{-1}x, x \rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Si $\Lambda = \text{Id}$ on dit que X est réduite. Alors, dans une base orthonormée (e_i) , $X = \sum a_i e_i$, où les a_i sont des v.a.i.i.d réelles $\mathcal{N}(0, 1)$.

1 Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

2 Espérance et variance du volume

3 Idées de preuve

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

Notations

Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note :

- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$,
- $\alpha! = \alpha_0! \dots \alpha_n!$,
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$,
- si $|\alpha| = d$, $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$.

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\pi^{n+1} d!} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z) \overline{Q(z)} e^{-\|z\|^2} dz.$$

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\pi^{n+1} d!} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z) \overline{Q(z)} e^{-\|z\|^2} dz.$$

- Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale est un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.
- La distribution de Kostlan est invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ par précomposition.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On fixe d , n et $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient P_1, \dots, P_r des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap P_i^{-1}(0) \right) \cap \mathbb{S}^n.$$

Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de \mathbb{S}^n .

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On fixe d , n et $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient P_1, \dots, P_r des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap P_i^{-1}(0) \right) \cap \mathbb{S}^n.$$

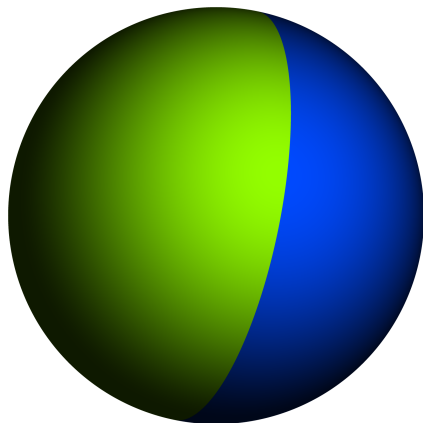
Lemme

Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de \mathbb{S}^n .

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout n, r et d , on a : $\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})$.

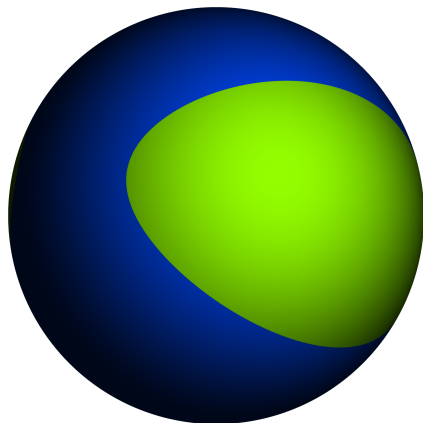
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 1$$

Images par Vincent Beffara.

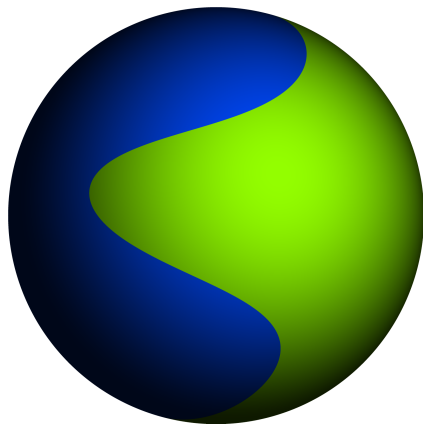
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 2$$

Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 3$$

Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 5$$

Images par Vincent Beffara.

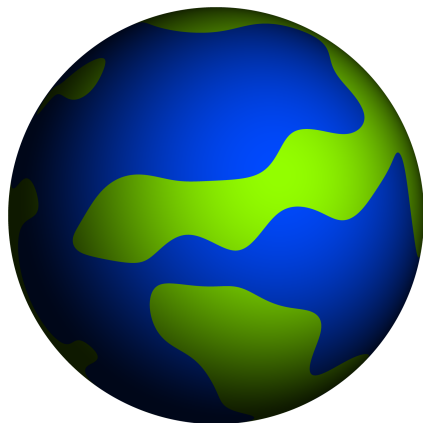
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 10$$

Images par Vincent Beffara.

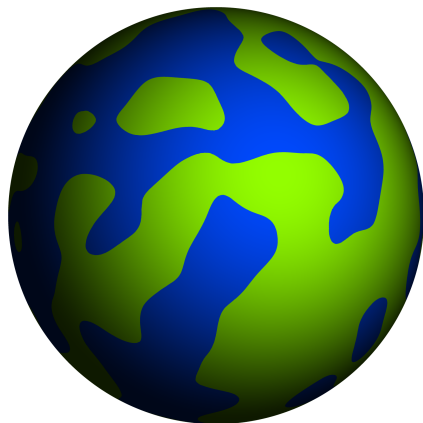
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 20$$

Images par Vincent Beffara.

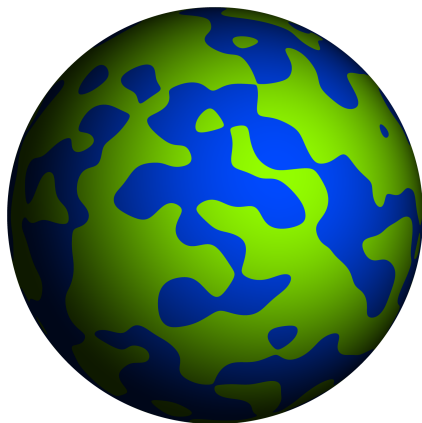
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 50$$

Images par Vincent Beffara.

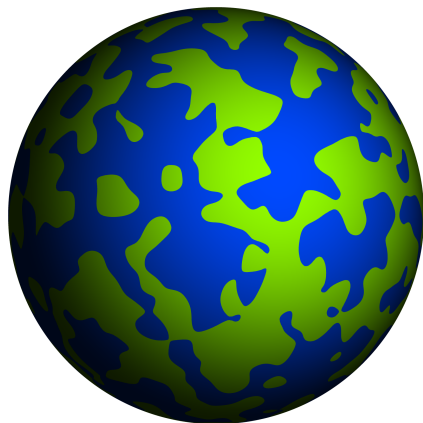
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 100$$

Images par Vincent Beffara.

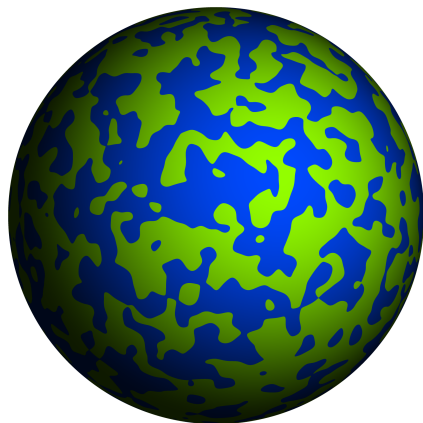
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 200$$

Images par Vincent Beffara.

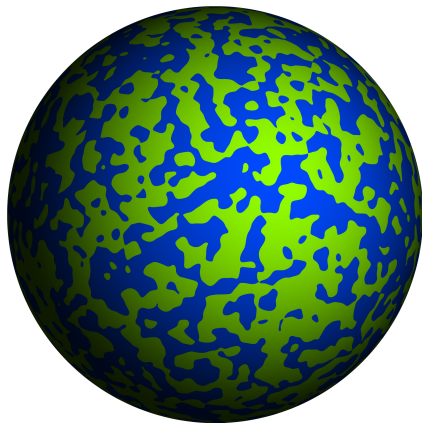
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 500$$

Images par Vincent Beffara.

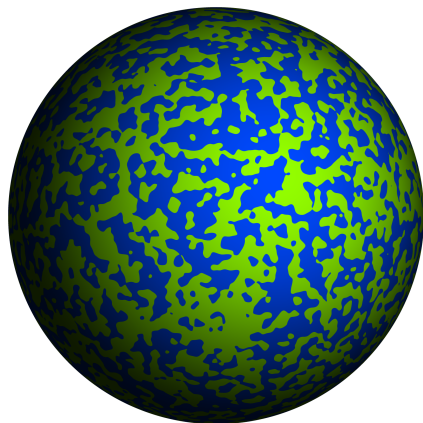
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 1000$$

Images par Vincent Beffara.

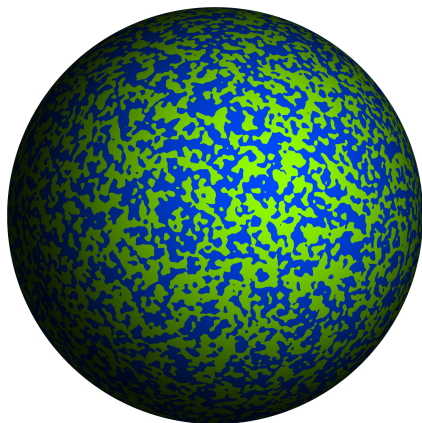
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 2000$$

Images par Vincent Beffara.

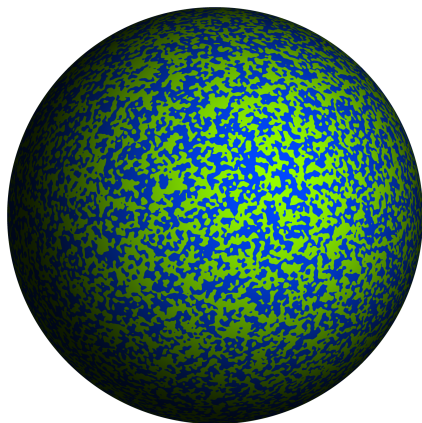
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$$d = 5000$$

Images par Vincent Beffara.

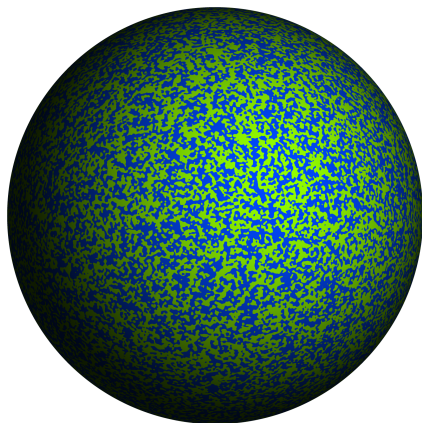
Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$d = 10000$

Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires sur \mathbb{S}^2



$d = 20000$

Images par Vincent Beffara.

Zéros de sections aléatoires

\mathcal{X} variété projective complexe de dimension n ,
 $(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur \mathcal{X} ,
 $(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur \mathcal{X} ,
 ω forme de Kähler induite par la courbure de \mathcal{L} .

On suppose \mathcal{X} , \mathcal{L} et \mathcal{E} équipés de structures réelles compatibles.

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$ invariantes par conjugaison.

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ est muni d'un produit scalaire L^2 induit par ω , $h_{\mathcal{E}}$ et $h_{\mathcal{L}}$.

Zéros de sections aléatoires

Définition

Soit $s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \text{Id})$. On note $Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$, où M est le lieu réel de \mathcal{X} .

Exemple

Si $\mathcal{X} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ et \mathcal{E} est trivial, alors $M = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et

$$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = \left(\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n] \right)^r.$$

On retrouve r polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Lemme

Pour tout d assez grand, Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de M .

Lemme

Pour tout d assez grand, Z_d est presque sûrement une sous-variété lisse de codimension r de M .

La forme de Kähler ω induit une métrique riemannienne sur M et Z_d .
 $|dV_M|$ mesure riemannienne sur M , $|dV_d|$ mesure riemannienne sur Z_d .

Z_d définit une mesure de Radon aléatoire :

$$\forall \phi \in C^0(M), \quad \langle Z_d, \phi \rangle = \int_{Z_d} \phi |dV_d|.$$

Espérance et variance du volume

Espérance du volume

Soit $s_d \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ et Z_d le lieu des zéros réels de s_d .

Théorème (L., 2016)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} + \|\phi\|_{C^0} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ .

Espérance du volume

Soit $s_d \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ et Z_d le lieu des zéros réels de s_d .

Théorème (L., 2016)

Pour tout $\phi \in C^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} + \|\phi\|_{C^0} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ .

Corollaire (équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaires continues sur $C^0(M)$,

$$d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} |dV_M|.$$

Variance du volume

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r} > 0$ est explicite et ne dépend que de n et r .

Variance du volume

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r} > 0$ est explicite et ne dépend que de n et r .

Cas de n polynômes de Kostlan–Shub–Smale sur \mathbb{S}^n traité par Dalmao (2015) et Armentano–Azaïs–Dalmao–León (2017 et 2018).

Ils obtiennent un théorème central limite :

$$\frac{\text{card}(Z_d) - \mathbb{E}[\text{card}(Z_d)]}{\text{Var}(\text{card}(Z_d))^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Concentration en probabilité

Corollaire

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \geq d^{\frac{r+\varepsilon}{4}} \right) = O\left(d^{\frac{r-n-\varepsilon}{2}}\right).$$

Démonstration.

Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P} \left(\left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \geq d^{\frac{r+\varepsilon}{4}} \right) \leq d^{-\frac{r+\varepsilon}{2}} \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle). \quad \square$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Soit $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$, nulle hors de U , strictement positive sur U .

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout d assez grand, $\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle] > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) &= \mathbb{P}(\langle Z_d, \phi_U \rangle = 0) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle]\right| > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{d^r\varepsilon^2} \text{Var}(\langle Z_d, \phi_U \rangle) \\ &= O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).\end{aligned}$$

Équidistribution presque sûre

On considère une suite aléatoire de polynômes de degrés croissants :

$$(P_d)_{d \in \mathbb{N}^*} \in \prod_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

distribuée selon la loi $d\nu$, produit des lois de Kostlan.

Corollaire

Si $n \geq 3$, alors $d\nu$ -presque sûrement on a :

$$\forall \phi \in C^0(\mathbb{S}^n), \quad \frac{1}{\sqrt{d}} \langle Z_{P_d}, \phi \rangle \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

Équidistribution presque sûre

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{d \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} (\langle Z_{P_d}, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]) \right)^2 \right] = \sum_{d \geq 1} \frac{1}{d} \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) < +\infty,$$

car $\frac{1}{d} \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$. Donc $d\nu$ -p.s.

$$\sum_{d \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} (\langle Z_{P_d}, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]) \right)^2 < +\infty,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \langle Z_{P_d}, \phi \rangle \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{d\nu\text{-p.s.}} \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

On conclut par séparabilité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$.

Idées de preuve

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale, $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale, $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

$$\begin{aligned} e_d(x, y) &= \sum_{|\alpha|=d=|\beta|} \mathbb{E}[a_\alpha a_\beta] \sqrt{\binom{d}{\alpha}} \sqrt{\binom{d}{\beta}} x^\alpha y^\beta \\ &= \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha \\ &= (\langle x, y \rangle)^d. \end{aligned}$$

Limite d'échelle du noyau de Bergman

Dans le cas général, la fonction de corrélation e_d est le noyau de Bergman de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

On a une limite d'échelle locale universelle pour e_d (Dai–Liu–Ma, 2006) :

$$e_d(x, y) \simeq \exp\left(-\frac{d}{2} \|x - y\|^2\right),$$

dès que $D(x, y) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Théorème (Ma–Marinescu, 2015)

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|e_d(x, y)\|_{C^k} = O\left(d^{\frac{k}{2}} \exp\left(-C\sqrt{d}D(x, y)\right)\right),$$

quand $d \rightarrow +\infty$, uniformément en (x, y) .

Heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \text{Vol}(M) d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \text{Vol}(M) d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$ et de dimension $n - r$, donc volume en $d^{\frac{r-n}{2}}$.

Finalement $\text{Vol}(Z_d)$ est proportionnel à $\text{Vol}(M) d^{\frac{r}{2}}$.

Heuristique pour la variance du volume

On a $\text{Vol}(Z_d) = \sum_i \text{Vol}(Z_d \cap B_i) = \sum_i \text{Vol}(Z_{d,i})$, donc

$$\begin{aligned}\text{Var}(\text{Vol}(Z_d)) &= \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)^2] - \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)]^2 \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,i}) \text{Vol}(Z_{d,j})] - \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,i})] \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,j})]\end{aligned}$$

Heuristique pour la variance du volume

On a $\text{Vol}(Z_d) = \sum_i \text{Vol}(Z_d \cap B_i) = \sum_i \text{Vol}(Z_{d,i})$, donc

$$\begin{aligned}\text{Var}(\text{Vol}(Z_d)) &= \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)^2] - \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)]^2 \\ &= \sum_{i,j} \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,i}) \text{Vol}(Z_{d,j})] - \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,i})] \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_{d,j})]\end{aligned}$$

Seuls contribuent les termes avec $i = j$, soit $\simeq \text{Vol}(M) d^{\frac{n}{2}}$ termes.

Ces termes sont de l'ordre de $\text{Vol}(Z_{d,i})^2$, i.e. d^{r-n} .

$\text{Var}(\text{Vol}(Z_d))$ est de l'ordre de $d^{r-\frac{n}{2}} \text{Vol}(M)$.

Formule de Kac–Rice

On se place dans le cas des hypersurfaces ($r = 1$) pour un polynôme de Kostan–Shub–Smale.

Formule de Kac–Rice

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi |dV_d| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \mid P(x) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(x, x)}} |dV_{\mathbb{S}^n}|.$$

Dans le cas général, $x \mapsto e_d(x, x)$ ne s'annule pas pour d assez grand, et on a une formule similaire.

Asymptotique de l'espérance

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \partial_{x_1} e_d(x, x) & \partial_{x_1} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x, x) & \partial_{x_n} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{y_n} e_d(x, x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ sachant $P(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance s'obtient à partir de Λ .

Asymptotique de l'espérance

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \partial_{x_1} e_d(x, x) & \partial_{x_1} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{y_n} e_d(x, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x, x) & \partial_{x_n} \partial_{y_1} e_d(x, x) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{y_n} e_d(x, x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ sachant $P(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance s'obtient à partir de Λ .

$\frac{\mathbb{E} \left[\|d_x P\| \mid P(x) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(x, x)}}$ ne dépend que de e_d et ses dérivées en (x, x) .

On connaît les asymptotiques de ces quantités et elles sont universelles. (Résultats de : Tian, Zelditch, Catlin, Dai–Liu–Ma.)

Expression de la variance

$$\begin{aligned}\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) &= \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle^2] - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{x,y \in Z_d} \phi(x)\phi(y) |dV_d|^2\right] - \mathbb{E}\left[\int_{x \in Z_d} \phi(x) |dV_d|\right]^2.\end{aligned}$$

Par des formules de Kac–Rice on obtient :

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = \int_{x,y \in \mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y) \mathcal{D}_d(x,y) |dV_{\mathbb{S}^n}|^2,$$

où la densité $\mathcal{D}_d(x,y)$ ne dépend que de e_d et de ses dérivées en (x,x) , (x,y) , (y,x) et (y,y) .

Comportement de la densité

À longue distance

Pour $K > 0$ bien choisi, on a $\mathcal{D}_d(x, y) = O\left(d^{r-\frac{n}{2}-1}\right)$ uniformément sur :

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \mid D(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}} \right\}.$$

À courte distance

Sur $\left\{ (x, y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \mid D(x, y) < K \frac{\ln d}{\sqrt{d}} \right\}$, on a une limite d'échelle universelle :

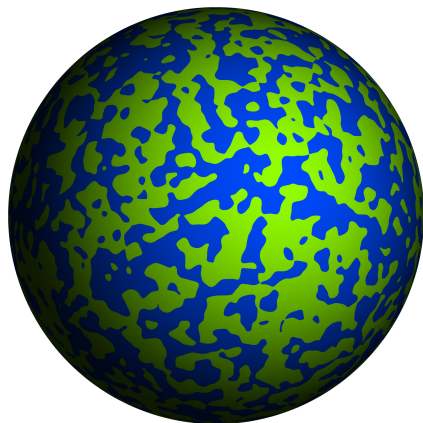
$$\mathcal{D}_d \left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}} \right) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|),$$

où $\|z\| < K \ln d$ dans la carte exponentielle en x .

Asymptotique de la variance

$$\begin{aligned}\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) &\simeq \int_{x \in \mathbb{S}^n} \int_{y \in B(x, K \frac{\ln d}{\sqrt{d}})} \phi(x) \phi(y) \mathcal{D}_d(x, y) |dV_{\mathbb{S}^n}|^2 \\ &\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \left(\int_{\|z\| < K \ln d} \phi(x) \phi\left(x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \mathcal{D}_d\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) dz \right) |dV_{\mathbb{S}^n}| \\ &\simeq d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x)^2 |dV_{\mathbb{S}^n}| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(\|z\|) dz \right).\end{aligned}$$

Merci de votre attention.



Courbe aléatoire sur \mathbb{S}^2 de degré $d = 1000$.

Image par Vincent Beffara.